Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{-1+2u_n}{u_n}$

On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{-1+u_n}$

1. Calculer u_1 , u_2 et v_0
2. On utilisant une démonstration par récurrence, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n \leq 2$
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante
4. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique, déterminer sa raison et son premier terme v_0
5. Calculer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
6. Calculer les sommes $S = v_1 + \cdots + v_{10}$ et $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 1$

   b) Etudier les variations de la suite (u_n)

2. On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, déterminer sa raison et son premier terme v_0

   b. Calculer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n

   c. Calculer les sommes $S = v_1 + \cdots + v_{10}$ et $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

Exercice 3 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$

Dresser le tableau de variation de f .

2. On considère la suite (u_n) définie par:

   $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Calculer u_1 et u_2 (donner les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimales arrondies à 10^{-2} près).

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

   c. En déduire, par récurrence, que pour tout entier n , $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.

   d. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{10u_n}$.

On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{10x}$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f et construire sur l'axe des abscisses les premiers termes $u_0\,;u_1\,;u_2\,;\cdots$ de la suite (u_n) .
   Quelles conjectures peut-on faire ?
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, positive et majorée par 10.
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ.
   Déterminer cette limite ℓ

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$.

1. Calculer u_1 et u_2 Tracer les droites d'équations $y = \frac{1}{3}x + 5$ et $y = x$. Construire sur ce graphique les premières termes $u_0\,;u_1\,;u_2\,;\cdots$ de la suite.
   Quelles conjectures peut-on faire ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + h$. Déterminer le réel h pour que la suite (v_n) soit géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
3. Exprimer alors v_n , puis u_n , en fonction de n . En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$

On admettra que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de f ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note α la solution.
   On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Tracer la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[0;8]$. Puis, placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 ; u_1 et u_2.
   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
   b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ Où α est le réel défini dans la question
   c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
   a) Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
   b) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$

Série des exercices
Cours : les suites numériques

Exercice 1

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad ; \ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_n < 1$
3) a- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_{n+1}-u_n = \dfrac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$

   b- Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.
4) Posons $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n-1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=1$.

   b- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_n = \dfrac{v_n-2}{v_n-1}$

   c- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \ ; \ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1- Calculer u_1 et u_2

2- a) Démontrer que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_{n+1}-2 = \dfrac{u_n-2}{3-u_n}$

   b) démontrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_n < 2$

   c) démontrer que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_{n+1}-u_n = \dfrac{(u_n-2)^2}{3-u_n}$

   d) déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.

3- posant $v_n = \dfrac{1}{2-u_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

   a) calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r=1$

   b) Calculer v_0 puis calculer v_n en fonction de n

   c) Déduire que $u_n = 2 - \dfrac{1}{v_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ puis déduire que $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. démontrer par récurrence que $u_n > 4$; $\forall n\in\mathbb{N}$
3. a) démontrer que $u_{n+1}-u_n = \dfrac{-3}{4}(u_n-4)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b) déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente

4. Posant $v_n = u_n - 4$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Calculer v_0

b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$.

c) Calculer v_n en fonction de n puis déduire que $u_n = 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 4$; $\forall n\in\mathbb{N}$. calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4

soit $(u_n)_{IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \ ; n\in N \end{cases}$

1 - Calculer u_1 et u_2

2 - a) Démontrer que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_{n+1}+1 = \dfrac{2(u_n+1)}{3+u_n}$

   b) démontrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_n > -1$

   c) vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_{n+1}-u_n = -\dfrac{(u_n+1)^2}{3+u_n}$

   b) déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3 - posant $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

   a) calculer v_0

   b) calculer $v_{n+1} = \dfrac{3u_n+5}{2(u_n+1)}$

   c) démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$

   d) calculer v_n en fonction de n

4 - a) vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_n = \dfrac{-v_n+2}{v_n-1}$ puis déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}) \ u_n = \dfrac{-n}{n+2}$

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5

Considérons la suite numérique (U_n) définie par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \frac{1}{2}$
3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

   b- Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.

   c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 1$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$
4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

   b- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$

   c- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$
5) Posons $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ montrer que $S_n = \frac{55}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{n}{2}$

Exercice 6

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \quad ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \frac{1}{2}$
3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

   b- Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.

   c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 1$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$
4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

   b- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

   c- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} \end{cases}$

1. démontrer par récurrence que $(\forall n \in N)\ u_n > 1$
2. démontrer que la suite (u_n) est décroissante puis déduire que' elle est convergente.
1. posant : $v_n = u_n - 1$

   a) démontrer que la suite (v_n) est géométrique à déterminer sa raison

   b) Calculer v_n en fonction de n

   c) Calculer u_n en fonction de n

   d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 8

Considérons la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1- Calculer u_1 et u_2

2- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_n > 1$

3- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$

   b- Étudier la monotonie de (u_n) et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_n \leq 2$

   c- Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 1 < u_n \leq 2$

4- Considérons la suite (v_n) tel que $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}; n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer v_0 et v_1

   b- Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $r = -1$ et déterminer v_n en fonction de n.

   c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$ et déduire u_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

   d- Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots. + v_n$